Лекція № 10

4.1. Чотиривимірний потенціал поля. Функція Лагранжа для заряду в зовнішньому полі

Як показує досвід, властивості частинки у відношенні її взаємодії із зовнішнім полем, характеризуються її зарядом. Властивості поля характеризуються 4-вектором $A_i(x,y,z,t)$, який називають 4-потенціалом. Побудуємо функцію дії з урахуванням взаємодії частинки із зовнішнім електромагнітним полем. Для вільної частинки вже побудована функція дії

$$S_m = -\int p_i dx^i \,. \tag{4.2}$$

Тут

$$p_i = mcu_i = \left(\frac{\varepsilon}{c}, -\vec{p}\right) = \left(\frac{mc}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}, -\frac{m\vec{\upsilon}}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}\right).$$

Часова компонента 4-імпульсу пов'язана з енергією частинки. При взаємодії частинки з полем її енергія змінюється. Нехай заряд частинки e . Досвід (закон Кулона) показує, що добавка до енергії пропорційна заряду $\sim e$. Побудуємо енергію частинки з урахуванням взаємодії з полем у вигляді

$$\varepsilon = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}} + e\varphi(\vec{r},t)\,.$$

$\varphi(\vec{r},t)$ – функція координат та часу, яка характеризує поле.

Аналогічно будується добавка до імпульсу

$$\vec{P} = \frac{m\vec{\upsilon}}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}} + \frac{e}{c}\vec{A}(\vec{r},t) = \vec{p} + \frac{e}{c}\vec{A}(\vec{r},t)\,.$$

$\vec{A}(\vec{r},t)$ – вектор, який характеризує поле. Отримали 4-імпульс частинки у зовнішньому полі

$$P_i = p_i + \frac{e}{c}A_i = mcu_i + \frac{e}{c}A_i. \tag{4.3}$$

Чотиривимірний потенціал електромагнітного поля (коваріантні компоненти)

$$A_i = \left(\varphi, -\vec{A}\right) \tag{4.4}$$

$\vec{A}$ – векторний потенціал, φ – скалярний потенціал.

Будуємо функцію дії у вигляді (4.2), замінивши p_i вільної частинки на P_i частинки у зовнішньому полі

$$S = -\int_a^b P_i dx^i = \underbrace{-\int_a^b p_i dx^i}_{S_m} \underbrace{-\frac{e}{c}\int_a^b A_i dx^i}_{S_{mf}} = S_m + S_{mf}. \tag{4.5}$$

S_m – функція дії вільної частинки, S_{mf} – частина функції дії, яка відповідає взаємодії зарядженої частинки із зовнішнім полем.

Отримаємо з (4.5) відповідну функцію Лагранжа. Для S_m маємо вже формулу (3.9)

$$S_m = -\int_a^b p_i dx^i = -mc^2 \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{1 - \frac{\upsilon^2}{c^2}}\, dt.$$

Частина функції дії. яка відповідає взаємодії частинки із полем перепишеться так

$$S_{mf} = -\frac{e}{c}\int_a^b A_i dx^i = -\frac{e}{c}\int_{t_1}^{t_2} A_i \frac{dx^i}{dt} dt;$$

$$x^i = (ct, \vec{r}); \quad \frac{dx^i}{dt} = \left(c, \frac{d\vec{r}}{dt}\right) = (c, \vec{\upsilon});$$

$$A_i \frac{dx^i}{dt} = c\varphi - \vec{A}\vec{\upsilon};$$

$$S_{mf} = -\frac{e}{c}\int_{t_1}^{t_2} (c\varphi - \vec{A}\vec{\upsilon}) dt = \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{e}{c}\vec{A}\vec{\upsilon} - e\varphi\right) dt$$

Функція Лагранжа зарядженої частинки в електромагнітному полі

$$L = -mc^2 \sqrt{1 - \frac{\upsilon^2}{c^2}} + \frac{e}{c}\vec{A}\vec{\upsilon} - e\varphi. \tag{4.6}$$

Величини $\vec{A}(\vec{r}, t), \varphi(\vec{r}, t)$, які характеризують поле та залежать від $\vec{r}$ та t, вважаємо заданими.

З формули (4.6) отримаємо узагальнений імпульс за відомою формулою

$$\vec{P} = \frac{\partial L}{\partial \vec{\upsilon}}.$$

Маємо

$$\vec{P} = \frac{\partial}{\partial \vec{\upsilon}}\left(-mc^2\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}} + \frac{e}{c}\vec{A}\vec{\upsilon} - e\varphi\right) = \frac{m\vec{\upsilon}}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}} + \frac{e}{c}\frac{\partial}{\partial \vec{\upsilon}}(\vec{A}\vec{\upsilon} - e\varphi);$$

$$\frac{\partial}{\partial \vec{\upsilon}}(\vec{A}\vec{\upsilon} - e\varphi) = \nabla_{\vec{\upsilon}}(\vec{A}\vec{\upsilon} - e\varphi) = \nabla_{\vec{\upsilon}}(\vec{A}\vec{\upsilon}) = \vec{A};$$

Узагальнений імпульс частинки в електромагнітному полі має такий вигляд

$$\vec{P} = \vec{p} + \frac{e}{c}\vec{A} = \frac{m\vec{\upsilon}}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}} + \frac{e}{c}\vec{A}. \tag{4.7}$$

Енергія частинки через функцію Лагранжа в електромагнітному полі визначається формулою

$$\varepsilon = \vec{P}\vec{\upsilon} - L;$$

$$\varepsilon = \left(\vec{p} + \frac{e}{c}\vec{A}\right)\vec{\upsilon} + mc^2\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}} - \frac{e}{c}\vec{A}\vec{\upsilon} + e\varphi =$$

$$= \vec{p}\vec{\upsilon} + mc^2\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}} + \cancel{\frac{e}{c}\vec{A}\vec{\upsilon}} - \cancel{\frac{e}{c}\vec{A}\vec{\upsilon}} + e\varphi =$$

$$= \frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}} + e\varphi.$$

Енергія частинки в електромагнітному полі має такий вигляд

$$\varepsilon = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}} + e\varphi. \tag{4.8}$$

4.2. Рівняння руху заряду в електромагнітному полі у тривимірному вигляді. Сила Лоренца

Рівняння Лагранжа

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \vec{v}}\right)=\frac{\partial L}{\partial \vec{r}};$$

$$\frac{d}{dt}\left(\vec{p}+\frac{e}{c}\vec{A}\right)=\frac{\partial}{\partial \vec{r}}\left(-mc^2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}+\frac{e}{c}\vec{A}\vec{v}-e\varphi\right);$$

$$\frac{d\vec{p}}{dt}+\frac{e}{c}\frac{d\vec{A}}{dt}=\frac{\partial}{\partial \vec{r}}\left(\frac{e}{c}\vec{A}\vec{v}-e\varphi\right);$$

Розглянемо повну похідну по часу від векторного потенціалу

$$\frac{d}{dt}\vec{A}(x,y,z,t)=\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}+\frac{\partial \vec{A}}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial \vec{A}}{\partial y}\frac{dy}{dt}+\frac{\partial \vec{A}}{\partial z}\frac{dz}{dt}=$$

$$=\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}+v_x\frac{\partial \vec{A}}{\partial x}+v_y\frac{\partial \vec{A}}{\partial y}+v_z\frac{\partial \vec{A}}{\partial z}=$$

$$=\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}+\underbrace{\left(v_x\frac{\partial}{\partial x}+v_y\frac{\partial}{\partial y}+v_z\frac{\partial}{\partial z}\right)}_{(\vec{v},\nabla)}\vec{A};$$

Отримали

$$\frac{d\vec{A}}{dt}=\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}+(\vec{v},\nabla)\vec{A}.$$

Тепер треба знайти градієнт

$$\frac{\partial}{\partial \vec{r}}\left(\frac{e}{c}\vec{A}\vec{v}-e\varphi\right)=\nabla\left(\frac{e}{c}\vec{A}\vec{v}-e\varphi\right)=\frac{e}{c}\nabla(\vec{A}\vec{v})-e\nabla\varphi.$$

Градієнт скалярного добутку двох векторів:

$$\nabla(\vec{a},\vec{b})=[\vec{b},\mathrm{rot}\vec{a}]+[\vec{a},\mathrm{rot}\vec{b}]+(\vec{a},\nabla)\vec{b}+(\vec{b},\nabla)\vec{a}\,.$$

В даному випадку один з векторів в $\nabla(\vec{A},\vec{v})$, а саме $\vec{v}$ є функцією часу й не залежить від координат, тому

$$\nabla(\vec{A},\vec{v})=[\vec{v},\mathrm{rot}\vec{A}]+(\vec{v},\nabla)\vec{A}$$

$$\frac{d\vec{p}}{dt}+\frac{e}{c}\left(\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}+\cancel{(\vec{v},\nabla)\vec{A}}\right)=\frac{e}{c}\left([\vec{v},\mathrm{rot}\vec{A}]+\cancel{(\vec{v},\nabla)\vec{A}}\right)-e\nabla\varphi;$$

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = e\left(-\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{A}}{\partial t} - \nabla\varphi\right) + \frac{e}{c}[\vec{\upsilon}, \mathrm{rot}\vec{A}] \tag{4.9}$$

Права частині формули (4.9) визначає силу, яка діє на заряд в електромагнітному полі.

Введемо позначення

$$\vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{A}}{\partial t} - \nabla\varphi \tag{4.10}$$

$$\vec{H} = \mathrm{rot}\vec{A}. \tag{4.11}$$

Полярний вектор $\vec{E}$ називають напруженістю електричного поля.

Аксіальний вектор $\vec{H}$ називають напруженістю магнітного поля.

Сила, яка діє на заряд в електромагнітному полу називається силою Лоренца. Сила Лоренца складається із двох частин. Частина $\vec{F}_{ел.}$

$$\vec{F}_{ел.} = -e\left(\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{A}}{\partial t} + \nabla\varphi\right) = e\vec{E} \tag{4.12}$$

не залежить від швидкості руху заряду та паралельна напруженості електричного поля $\vec{E}$.

Частина $\vec{F}_{магн.}$

$$\vec{F}_{магн.} = \frac{e}{c}[\vec{\upsilon}, \mathrm{rot}\vec{A}] = \frac{e}{c}[\vec{\upsilon}, \vec{H}]. \tag{4.13}$$

залежить від швидкості руху заряду та перпендикулярна швидкості $\vec{\upsilon}$ та напруженості магнітного поля $\vec{H}$. Таким чином,

$$\vec{F}_{Лоренца} = e\vec{E} + \frac{e}{c}[\vec{\upsilon}, \vec{H}]. \tag{4.14}$$

Вираз для сили Лоренца (4.14) відомий із дослідних даних. Ми будемо його розглядати як фундаментальний експериментальний факт.

Отримали рівняння руху заряду в полі у тривимірному вигляді

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = e\vec{E} + \frac{e}{c}[\vec{\upsilon}, \vec{H}]. \tag{4.15}$$

Визначимо, як змінюється енергія заряду, який рухається у електромагнітному полі. Будемо називати «кінетичною енергією» енергію

$$\varepsilon_{кін.} = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}. \tag{4.16}$$

Як змінюється з часом похідна $\frac{d\varepsilon_{кін.}}{dt}$? Далі у викладках індекс «*кін.*» опускаємо.

Скористаємось формулою для енергії (3.16).

$$\varepsilon = \sqrt{c^2 p^2 + m^2 c^4}.$$

Візьмемо похідні по часу від обох частин виразу для квадрату енергії $\varepsilon^2 = c^2 p^2 + m^2 c^4$:

$$\frac{d}{dt}(\varepsilon^2) = \frac{d}{dt}(c^2 p^2 + m^2 c^4);$$

$$\varepsilon \frac{d\varepsilon}{dt} = c^2 \left(\vec{p}, \frac{d\vec{p}}{dt} \right); \quad \frac{d\varepsilon}{dt} = \left(\frac{c^2 \vec{p}}{\varepsilon}, \frac{d\vec{p}}{dt} \right).$$

Врахуємо, що $\frac{c^2 \vec{p}}{\varepsilon} = \vec{v}$ та скористаємось рівнянням руху (4.15)

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \left(\vec{v}, e\vec{E} + \frac{e}{c}[\vec{v}, \vec{H}] \right);$$

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = e\left(\vec{v}, \vec{E}\right) + \frac{e}{c}\underbrace{\left(\vec{v}, [\vec{v}, \vec{H}]\right)}_{=0}.$$

Змішаний добуток $(\vec{v},[\vec{v},\vec{H}]) = 0$, магнітне поле не змінює енергію. За зміну кінетичної енергії заряду в електромагнітному полі відповідає тільки електричне поле

$$\frac{d\varepsilon_{кін.}}{dt} = e\left(\vec{v}, \vec{E}\right) \tag{4.17}$$

Роботу над зарядом виконує тільки електричне поле:

$$d\varepsilon = dA = e(\vec{v}, \vec{E})dt = (e\vec{E}, \vec{v}dt) = (\vec{F}, d\vec{r}).$$

Магнітне поле роботи не виконує, бо $\vec{F}_{магн.} \perp \vec{v}$.

Рівняння (4.17) зміни кінетичної енергії є наслідком рівняння руху заряду (4.15).

Рівняння руху заряду в полі (4.15) є інваріантним відносно одночасної заміни $t \to -t, \vec{E} \to \vec{E}, \vec{H} \to -\vec{H}$. При цьому $\varphi \to \varphi, \vec{A} \to -\vec{A}$. Це означає наступне: якщо в електромагнітному полі можливий певний рух, то можливий і обернений (зворотний) рух в полі, в якому напруженість магнітного поля має протилежний напрямок. Обернений рух – рух при якому система проходить ті ж самі стани в оберненому порядку.

При виведенні рівняння руху заряду в полі ми знехтували тим, що заряд, який знаходиться в електромагнітному полі не тільки зазнає впливу поля, але й сам утворює власне електромагнітне поле, яке взаємодіє із зовнішнім полем. Якщо заряд малий, то його власним полем та дією на зовнішнє поле можна знехтувати. Ми вважали, що само зовнішнє поле не залежить від координат та швидкості заряду. Умови, за якими можна вважати заряд малим, будуть отримані далі при розгляді випромінювання поля зарядом, що рухається.

4.3. Функція Гамільтона заряду в електромагнітному полі

Скористаємось формулою (4.8) для енергії заряду в електромагнітному полі та визначенням узагальненого імпульсу (4.7). Функція Гамільтона – це енергія, яка виражена через імпульс. Для вільної частинки

$$\varepsilon = \sqrt{c^2 p^2 + m^2 c^4}; \quad \varepsilon^2 = c^2 p^2 + m^2 c^4.$$

З формул (4.8) та (4.7) видно, що

$$\varepsilon - e\varphi = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{\upsilon^2}{c^2}}}; \quad \vec{P} - \frac{e}{c}\vec{A} = \vec{p},$$

тому

$$(\varepsilon - e\varphi)^2 = c^2 \left(\vec{P} - \frac{e}{c}\vec{A} \right)^2 + m^2 c^4.$$

Отримали функцію Гамільтона для релятивістського заряду в полі

$$H = \sqrt{c^2 \left(\vec{P} - \frac{e}{c}\vec{A} \right)^2 + m^2 c^4} + e\varphi. \tag{4.18}$$

В нерелятивістській границі малих швидкостей функція Лагранжа (4.6) приймає вигляд

$$L = -mc^2 \sqrt{1 - \frac{\upsilon^2}{c^2}} + \frac{e}{c}\vec{A}\vec{\upsilon} - e\varphi \approx \frac{m\upsilon^2}{2} + \frac{e}{c}\vec{A}\vec{\upsilon} - e\varphi + mc^2.$$

Енергію спокою опускаємо. Маємо

$$L_{нерел.} = \frac{mv^2}{2} + \frac{e}{c}\vec{A}\vec{v} - e\varphi. \tag{4.19}$$

Узагальнений імпульс в нерелятивістському випадку

$$\vec{P} = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} + \frac{e}{c}\vec{A} \approx m\vec{v} + \frac{e}{c}\vec{A}$$

або

$$\vec{P} = m\vec{v} + \frac{e}{c}\vec{A}; \quad m\vec{v} = \vec{P} - \frac{e}{c}\vec{A}. \tag{4.20}$$

Функція Гамільтона нерелятивістського заряду

$$H = mc^2\sqrt{1+\frac{1}{m^2c^2}\left(\vec{P}-\frac{e}{c}\vec{A}\right)^2} + e\varphi \approx mc^2\left(1+\frac{1}{2m^2c^2}\left(\vec{P}-\frac{e}{c}\vec{A}\right)^2\right) + e\varphi =$$

$$= \frac{1}{2m}\left(\vec{P}-\frac{e}{c}\vec{A}\right)^2 + e\varphi + mc^2.$$

$$H_{нерел.} = \frac{1}{2m}\left(\vec{P}-\frac{e}{c}\vec{A}\right)^2 + e\varphi. \tag{4.21}$$

В (4.21) відкинули енергію спокою.

4.4. Калібрувальна інваріантність

Напруженості електричного та магнітного полів виражаються через похідні від векторного та скалярного потенціалів (ф-ли (4.10), (4.11))

$$\vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{A}}{\partial t} - \nabla\varphi; \quad \vec{H} = \mathrm{rot}\vec{A}.$$

В рівняння руху (4.15) входять саме напруженості, а не потенціали. Одним й тим самим значенням $\vec{E}$ та $\vec{H}$ відповідає широкий клас потенціалів. Наприклад, додавання до векторного потенціалу $\vec{A}$ градієнту ∇f будь-якої скалярної функції координат та часу $f(x, y, z, t)$:

$$\vec{A}' = \vec{A} + \nabla f; \quad \vec{H}' = \mathrm{rot}(\vec{A} + \nabla f) = [\nabla, \vec{A} + \nabla f] =$$
$$= [\nabla, \vec{A}] + \underbrace{[\nabla, \nabla f]}_{[\nabla,\nabla] f = 0} = \mathrm{rot}\vec{A} = \vec{H};$$

не змінює напруженість магнітного поля. Для того, щоб при такому перетворенні векторного потенціалу не змінювалась також напруженість електричного поля, треба змінити й скалярний потенціал:

$$\frac{\partial \vec{A}'}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\vec{A} + \nabla f\right) = \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial t}(\nabla f) = \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \nabla \frac{\partial f}{\partial t};$$
$$\vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \nabla \varphi = -\frac{1}{c}\left(\frac{\partial \vec{A}'}{\partial t} - \nabla \frac{\partial f}{\partial t}\right) - \nabla \varphi =$$
$$= -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{A}'}{\partial t} - \nabla \underbrace{\left(\varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial f}{\partial t}\right)}_{\varphi'} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{A}'}{\partial t} - \nabla \varphi' = \vec{E}';$$
$$\varphi' = \varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial f}{\partial t}.$$

Таким чином, одночасна заміна

$$\begin{aligned} &\vec{A}' \to \vec{A} + \nabla f; \\ &\varphi' \to \varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial f}{\partial t} \end{aligned} \tag{4.22}$$

не змінює напруженості електромагнітного поля. Напруженості $\vec{E}$ та $\vec{H}$ є інваріантними відносно перетворень потенціалів (4.22). Перетворення (4.22) називають **градієнтними** або **калібрувальними** перетвореннями.

Калібрувальні перетворення можна записати у чотиривимірному вигляді

$$A_i' \to A_i - \frac{\partial f}{\partial x^i}. \tag{4.23}$$

Тут f – 4-скаляр.

В класичній (не квантовій) електродинаміці величинами, які вимірюються, є напруженості $\vec{E}$ та $\vec{H}$. Потенціали $\vec{A}$ та φ є допоміжними величинами. Вони теж грають важливу роль, бо допомагають зменшити кількість невідомих з 6 (два тривимірних вектори $\vec{E}$ та $\vec{H}$) до 4 (тривимірний вектор $\vec{A}$ та скаляр φ). Особливо важливе значення у потенціалів в квантовій механіці, де вони входять в основне рівняння квантової механіки.

Ще раз підкреслимо. Градієнтні перетворення (4.22) (або (4.23)) не змінюють поле: векторний потенціал визначається з точністю до градієнту від довільної функції координат та часу, а скалярний потенціал – з точністю до похідної по часу від тієї ж функції. В термінах 4-простору – з точністю до 4-градієнту від довільної функції.